

ПЛОСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ СО СВЯЗНОСТЬЮ: ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ И ПРЕПЯТСТВИЯ

BEE ROSA DAVIS

Аннотация. Модель системы, описываемой главным расслоением со связностью, называется *расщеплённой*, если она постулирует тривиальность параллельного переноса вдоль всех петель, т. е. независимую эволюцию слоевых и базовых степеней свободы. Доказываются четыре группы утверждений. (1) *Характеризация*: над односвязной базой расщепимость равносильна тождественному обращению кривизны в нуль, тривиальности группы голономии и существованию глобального параллельного сечения. (2) *Количественные оценки*: удельная (на единицу площади) ошибка расщеплённой модели в точке равна норме кривизны в этой точке; при $\dim M \leq 4$ соболевское $W^{1,2}$ -расстояние от связности до расщеплённой модели оценивается снизу через функционал Янга–Миллса. (3) *Топологические препятствия*: при ненулевых характеристических классах плоских связностей на расслоении не существует, а в размерности четыре функционал Янга–Миллса отделён от нуля топологической константой: $S_{YM} \geq 4\pi^2 | \langle c_2, [M] \rangle |$. (4) *Классификация*: над неодносвязной базой плоские модели классифицируются многообразием характеров $\text{Hom}(\pi_1(M), G)/G$, и расхождение нетривиальной плоской модели сосредоточено на несжимаемых петлях. Все утверждения относятся к паре (P, ω) ; вопрос о том, допускает ли конкретная прикладная система точное описание такой парой, лежит вне рамок заметки.

1. ВВЕДЕНИЕ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $\pi: P \rightarrow M$ — гладкое главное G -расслоение со связностью ω . Систему, состоящую из которой суть точки P , а эволюция задаётся параллельным переносом, будем называть *системой со связностью*. Нас интересует вопрос: когда такая система допускает описание с независимыми компонентами и какова точная цена неверного допущения о такой независимости. Ответ даётся в четырёх формах: характеристизация (§2), количественные оценки ошибки (§3), топологические препятствия (§4) и классификация плоских моделей над неодносвязной базой (§5).

Всюду ниже все объекты гладкие класса C^∞ , многообразие M связно, G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Для количественных утверждений G предполагается компактной; на $\mathfrak{g}$ фиксировано Ад-инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ с нормой $\|\cdot\|$, а на G — отвечающая ему биинвариантная риманова метрика с функцией расстояния d_G . Дополнительные предположения (односвязность, компактность, размерность базы) оговариваются в формулировках.

Определение 1.1 (связность, перенос, кривизна, голономия). *Связность* на P — это $\mathfrak{g}$ -значная 1-форма $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, удовлетворяющая условиям $\omega(X^*) = X$ для фундаментальных векторных полей X^* , $X \in \mathfrak{g}$, и $R_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega$ для всех $g \in G$; эквивалентно, G -эквивариантное горизонтальное распределение $H = \ker \omega \subset TP$, дополнительное к вертикальному. Параллельный перенос τ_γ вдоль кусочно гладкого пути γ в M определяется горизонтальным поднятием. *Кривизна* связности —

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \in \Omega^2(P, \mathfrak{g}).$$

Группа голономии в точке $p \in P$, $x = \pi(p)$:

$$\text{Hol}(\omega, p) = \{g \in G : \tau_\gamma(p) = p \cdot g \text{ для некоторой петли } \gamma \text{ в } x\};$$

суженная группа $\text{Hol}^0(\omega, p)$ отвечает стягиваемым петлям. В локальной тривиализации над $U \subset M$ связность задаётся калибровочным полем $A \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ с кривизной $F_A = dA + \frac{1}{2}[A, A]$.

Определение 1.2 (расщеплённая модель). Пусть система описывается парой (P, ω) . Модель называется *расщеплённой*, если она постулирует, что параллельный перенос вдоль любой петли тождествен — эквивалентно, что состояние слоя над точкой $x \in M$ определяется начальным условием и самой точкой x , но не путём, по которому она достигнута.

Замечание 1.3. Определение 1.2 — соглашение о терминах, а не утверждение. Содержательная часть работы — эквивалентности теоремы 2.1 и оценки §§3–5.

2. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ РАСЩЕПИМОСТИ

Теорема 2.1 (характеризация). Пусть M связно и односвязно, $\pi: P \rightarrow M$ — главное G -расслоение со связностью ω . Следующие условия эквивалентны:

- (i) $\Omega \equiv 0$;
- (ii) $\text{Hol}(\omega, p) = \{e\}$ для некоторой (эквивалентно, для любой) точки $p \in P$;
- (iii) параллельный перенос зависит только от концов пути;
- (iv) существует глобальное параллельное сечение $s: M \rightarrow P$ (в частности, P тривиально);
- (v) пара (P, ω) калибровочно изоморфна $(M \times G, \theta)$, где θ — тривиальная связность.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Группа $\text{Hol}^0(\omega, p)$ связна [6, т. 1, гл. II]. По теореме Амброуза–Зингера [1] её алгебра Ли порождена значениями $\Omega_q(X, Y)$ по всем точкам q , достижимым из p горизонтальными путями, и горизонтальным X, Y ; при $\Omega \equiv 0$ эта алгебра нулевая, а связная группа Ли с нулевой алгеброй Ли тривиальна. Односвязность M даёт $\text{Hol} = \text{Hol}^0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Если пути γ_0, γ_1 имеют общие концы, то $\tau_{\gamma_1}^{-1} \circ \tau_{\gamma_0}$ — перенос вдоль петли, равный тождественному по (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Зафиксируем $p_0 \in P$ над x_0 и положим $s(x) := \tau_\gamma(p_0)$ для произвольного пути γ из x_0 в x ; по (iii) определение корректно. Гладкость следует из гладкой зависимости решений ОДУ горизонтального поднятия от начальных данных и параметров; сечение параллельно по построению ($s_*T_x M \subset H_{s(x)}$, т. е. $s^*\omega = 0$).

(iv) $\Rightarrow$ (v). Отображение $\varphi: M \times G \rightarrow P$, $\varphi(x, g) = s(x) \cdot g$, — эквивариантный диффеоморфизм. Так как $s^*\omega = 0$, прямое вычисление даёт $\varphi^*\omega = \theta$ (форма Маурера–Картана второго сомножителя), т. е. тривиальную связность.

(v) $\Rightarrow$ (i). Для тривиальной связности $\Omega = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta] = 0$ на горизонтальных векторах; кривизна тензоральна и горизонтальна, следовательно $\Omega \equiv 0$. $\square$

Замечание 2.2. При $\pi_1(M) \neq 0$ эквивалентность нарушается: плоскостность кривизны необходима, но не достаточна для расщепимости. Полная классификация в этом случае даётся в §5.

3. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ

Здесь G компактна; d_G — биинвариантное расстояние.

Предложение 3.1 (асимптотика голономии малых петель). Пусть $x \in M$, векторы $X, Y \in T_x M$ ортонормированы, Σ_ε — образ квадрата $[0, \varepsilon]^2 \subset \text{span}(X, Y)$ при экспоненциальном отображении $\exp_x$, и $\gamma_\varepsilon = \partial \Sigma_\varepsilon$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ в любой локальной тривиализации

$$\tau_{\gamma_\varepsilon} = \exp(-\varepsilon^2 F_x(X, Y) + O(\varepsilon^3)), \quad d_G(\tau_{\gamma_\varepsilon}, e) = \varepsilon^2 \|F_x(X, Y)\| + O(\varepsilon^3).$$

В частности, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} d_G(\tau_{\gamma_\varepsilon}, e) = \|F_x(X, Y)\|$.

Доказательство. Утверждение классично («кривизна есть инфинитезимальная голономия», ср. [6, т. 1, гл. II]); приведём полное вычисление. Работаем в нормальных координатах с центром x ; метрика участвует только через выбор координат, само вычисление происходит в карте. Продолжим X, Y до координатных векторных полей; тогда $A(X), A(Y)$ — гладкие $\mathfrak{g}$ -значные функции, и через $\partial_W A(V)$ обозначим производную функции $A(V)$ по направлению W в точке x ; положим также $A_V := A_x(V)$.

Стороны петли γ_ε параметризуем в координатах:

$$c_1(t) = t\varepsilon X, \quad c_2(t) = \varepsilon X + t\varepsilon Y, \quad c_3(t) = \varepsilon X + \varepsilon Y - t\varepsilon X, \quad c_4(t) = (1-t)\varepsilon Y, \quad t \in [0, 1].$$

Перенос вдоль кривой c — решение уравнения $\dot{g}(t) = -A_{c(t)}(\dot{c}(t))g(t)$, $g(0) = e$; при конкатенации путей операторы переноса перемножаются слева, так что $\tau_{\gamma_\varepsilon} = T_4 T_3 T_2 T_1$. Итерация Пикара даёт для каждой стороны

$$T = e - \int_0^1 A_{c(t)}(\dot{c}(t)) dt + \int_0^1 \int_0^t A_{c(t)}(\dot{c}(t)) A_{c(s)}(\dot{c}(s)) ds dt + O(\varepsilon^3),$$

а разложение Тейлора $A_{c(t)} = A_x + \langle c(t), \nabla \rangle A + O(\varepsilon^2)$ (с $c(t) = O(\varepsilon)$) позволяет вычислить каждый интеграл с точностью $O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned} T_1 &= e - \varepsilon A_X - \frac{\varepsilon^2}{2} \partial_X A(X) + \frac{\varepsilon^2}{2} A_X^2, \\ T_2 &= e - \varepsilon A_Y - \varepsilon^2 \partial_X A(Y) - \frac{\varepsilon^2}{2} \partial_Y A(Y) + \frac{\varepsilon^2}{2} A_Y^2, \\ T_3 &= e + \varepsilon A_X + \frac{\varepsilon^2}{2} \partial_X A(X) + \varepsilon^2 \partial_Y A(X) + \frac{\varepsilon^2}{2} A_X^2, \\ T_4 &= e + \varepsilon A_Y + \frac{\varepsilon^2}{2} \partial_Y A(Y) + \frac{\varepsilon^2}{2} A_Y^2. \end{aligned}$$

Сумма линейных членов равна нулю, поэтому в произведении $T_4 T_3 T_2 T_1$ члены порядка ε сокращаются, а члены порядка ε^2 складываются из квадратичных членов отдельных сторон,

$$\varepsilon^2 (A_X^2 + A_Y^2) + \varepsilon^2 (\partial_Y A(X) - \partial_X A(Y))$$

(производные $\partial_X A(X)$ и $\partial_Y A(Y)$ взаимно уничтожаются), и из попарных произведений линейных членов в указанном порядке,

$$\varepsilon^2 (A_Y A_X - A_Y^2 - A_Y A_X - A_X A_Y - A_X^2 + A_Y A_X) = -\varepsilon^2 (A_X^2 + A_Y^2) - \varepsilon^2 [A_X, A_Y].$$

Итого

$$\tau_{\gamma_\varepsilon} = e - \varepsilon^2 (\partial_X A(Y) - \partial_Y A(X) + [A_X, A_Y]) + O(\varepsilon^3).$$

Координатные поля коммутируют, поэтому $(dA)_x(X, Y) = \partial_X A(Y) - \partial_Y A(X)$, а $\frac{1}{2}[A, A]_x(X, Y) = [A_X, A_Y]$; следовательно,

$$\tau_{\gamma_\varepsilon} = e - \varepsilon^2 F_x(X, Y) + O(\varepsilon^3) = \exp(-\varepsilon^2 F_x(X, Y) + O(\varepsilon^3)).$$

Смена тривиализации сопрягает $\tau_{\gamma_\varepsilon}$ элементом группы и в силу биинвариантности d_G не меняет расстояния; знак зависит от соглашений (ориентация петли, знак уравнения переноса) и на формулу расстояния также не влияет. Наконец, для биинвариантной метрики на компактной G однопараметрические подгруппы — геодезические, и $\exp$ — радиальная

изометрия в пределах радиуса инъективности, поэтому $d_G(\exp \zeta, e) = \|\zeta\|$ при малых $\|\zeta\|$; подстановка $\zeta = -\varepsilon^2 F_x(X, Y) + O(\varepsilon^3)$ даёт вторую формулу. $\square$

Следствие 3.2 (локализация ошибки). *Расщеплённая модель предсказывает $\tau_\gamma = e$ для всякой стягиваемой петли. По предложению 3.1 её расхождение с системой на петлях масштаба ε вблизи точки x равно $\varepsilon^2 e(x) + O(\varepsilon^3)$, где*

$$e(x) := \sup\{\|F_x(X, Y)\| : X, Y \in T_x M \text{ ортонормированы}\}.$$

В главном порядке по ε ошибка максимальна в точках максимума функции e ; при компактном M максимум достигается.

Предложение 3.3 (оценка расстояния снизу в $W^{1,2}$). *Пусть M компактно, ориентировано, $\dim M \leq 4$; G компактна; $P = M \times G$. Связность задаётся полем $A \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$; расщеплённой модели в данной тривиализации отвечает нулевое поле $A_0 \equiv 0$. Положим $S_{\text{YM}}(A) = \frac{1}{2} \int_M \|F_A\|^2 d\text{vol}_g$. Тогда существует $c = c(M, g, G) > 0$ такое, что*

$$\|A\|_{W^{1,2}} \geq \min\{1, c S_{\text{YM}}(A)^{1/2}\}.$$

Правая часть калибровочно инвариантна, поэтому та же оценка верна для $\|A^h\|_{W^{1,2}}$ при любом калибровочном преобразовании $A \mapsto A^h = h^{-1}Ah + h^{-1}dh$.

Доказательство. Так как dA — антисимметризация ковариантной производной ∇A (связность Леви-Чивиты без кручения), имеем $\|dA\|_{L^2} \leq c_1 \|\nabla A\|_{L^2} \leq c_1 \|A\|_{W^{1,2}}$. Билинейность скобки даёт поточечно $\|[A, A]\| \leq c_{\mathfrak{g}} \|A\|^2$, откуда $\|[A, A]\|_{L^2} \leq c_{\mathfrak{g}} \|A\|_{L^4}^2$. По вложению Соболева $W^{1,2} \hookrightarrow L^4$ при $\dim M \leq 4$ (компактное M): $\|A\|_{L^4} \leq C_S \|A\|_{W^{1,2}}$. Итого, с $t := \|A\|_{W^{1,2}}$,

$$\sqrt{2 S_{\text{YM}}(A)} = \|F_A\|_{L^2} \leq \|dA\|_{L^2} + \frac{1}{2} \|[A, A]\|_{L^2} \leq c_1 t + \frac{1}{2} c_{\mathfrak{g}} C_S^2 t^2.$$

Если $t \leq 1$, то правая часть не превосходит $(c_1 + \frac{1}{2} c_{\mathfrak{g}} C_S^2) t$, откуда $t \geq c S_{\text{YM}}(A)^{1/2}$ с $c = \sqrt{2}/(c_1 + \frac{1}{2} c_{\mathfrak{g}} C_S^2)$. Если $t > 1$ — утверждение тривиально. Калибровочная инвариантность S_{YM} следует из $F_{A^h} = h^{-1}F_A h$ и Ad -инвариантности нормы. $\square$

Замечание 3.4 (почему не L^2). Оценка снизу для L^2 -расстояния невозможна: норма кривизны содержит производные поля и не контролируется $\|A\|_{L^2}$. Контрпример локален и существует на любом M : в координатной карте возьмём срезающую функцию $\varphi \in C_c^\infty$, фиксированный вектор $\xi \in \mathfrak{g}$ и $A_k = k^{-1} \varphi \sin(kx^1) \xi dx^2$. Тогда $\|A_k\|_{L^2} = O(k^{-1}) \rightarrow 0$, тогда как $F_{A_k} = \varphi \cos(kx^1) \xi dx^1 \wedge dx^2 + O(k^{-1})$ и $S_{\text{YM}}(A_k) \rightarrow \frac{1}{4} \|\xi\|^2 \int \varphi^2 > 0$. Поэтому естественная метрика вопроса — соболевская $W^{1,2}$.

4. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ

Теорема 4.1 (препятствие Черна–Вейля). *Пусть M компактно, $P \rightarrow M$ — главное G -расслоение. Если для некоторого Ad -инвариантного многочлена f степени k класс когомологий $[f(\Omega)] \in H_{\text{dR}}^{2k}(M)$ отличен от нуля — например, отличен от нуля класс Понтрягина или Черна ассоциированного векторного расслоения, — то ни одна связность на P не является плоской. В частности, расщеплённая модель реализуется лишь на расслоении, не изоморфном P .*

Доказательство. Класс $[f(\Omega)]$ не зависит от выбора связности [7, § 11], [6, т. 2, гл. XII]; для плоской связности его представитель $f(\Omega) = f(0) = 0$, что противоречит $[f(\Omega)] \neq 0$. $\square$

Предложение 4.2 (отделённость функционала Янга–Миллса от нуля). Пусть M компактно, ориентировано, $\dim M = 4$; $G = SU(n)$ со скалярным произведением $\langle \xi, \eta \rangle = -\operatorname{tr}(\xi\eta)$ на $\mathfrak{su}(n)$; $P \rightarrow M$ — главное $SU(n)$ -расслоение и $c_2 = c_2(P)$ — второй класс Черна ассоциированного расслоения. Тогда для всякой связности ω на P

$$S_{\text{YM}}(\omega) = \frac{1}{2} \int_M \|F\|^2 d\operatorname{vol}_g \geq 4\pi^2 |\langle c_2, [M] \rangle|,$$

причём на (анти)автотдуальных связностях ($F = \pm *F$) достигается равенство.

Доказательство. По теории Черна–Вейля для $\mathfrak{su}(n)$ -значной кривизны

$$\langle c_2, [M] \rangle = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \langle F, *F \rangle d\operatorname{vol}_g,$$

где использовано тождество $\sum_a F^a \wedge F^a = \langle F, *F \rangle d\operatorname{vol}_g$ для 2-форм на ориентированном четырёхмерном многообразии (суммирование по ортонормированному базису $\mathfrak{g}$). Поточечно, по неравенству Коши–Буняковского и изометричности оператора $*$ на Λ^2 , $|\langle F, *F \rangle| \leq \|F\|^2$. Интегрируя: $|\langle c_2, [M] \rangle| \leq \frac{1}{8\pi^2} \int_M \|F\|^2 d\operatorname{vol}_g = \frac{1}{4\pi^2} S_{\text{YM}}$. При $F = \pm *F$ неравенство Коши–Буняковского обращается в равенство. Ср. [3]. $\square$

Замечание 4.3. Предложение 4.2 — точная количественная форма утверждения «препятствие имеет топологический размер»: при $\langle c_2, [M] \rangle \neq 0$ величина $\inf_{\omega} S_{\text{YM}}(\omega) \geq 4\pi^2 |\langle c_2, [M] \rangle| > 0$ есть нижняя грань «неустранимой кривизны» по всем связностям на P , зависящая только от топологии расслоения.

5. НЕОДНОСВЯЗНАЯ БАЗА И МНОГООБРАЗИЕ ХАРАКТЕРОВ

Теорема 5.1 (классификация плоских моделей). Пусть M связно. Сопоставление плоской связности её представления голономии $\rho_{\omega} : \pi_1(M, x_0) \rightarrow G$ устанавливает биекцию

$$\{\text{пары } (P, \omega), \Omega \equiv 0\} / \text{изоморфизм} \longleftrightarrow \operatorname{Hom}(\pi_1(M, x_0), G) / \text{сопряжение}.$$

Обратное отображение сопоставляет представлению ρ расслоение $P_{\rho} = \widetilde{M} \times_{\rho} G$ с индуцированной плоской связностью, где $\widetilde{M}$ — универсальное накрытие.

Доказательство. Поднятие плоской связности на $\widetilde{M}$ плоско над односвязной базой и по теореме 2.1 тривиализуемо параллельным сечением; действие $\pi_1(M)$ преобразованиями накрытия переводит параллельные сечения в параллельные и тем самым задаёт ρ_{ω} с точностью до сопряжения. Обратно, P_{ρ} несёт каноническую плоскую связность, голономия которой есть ρ . Взаимная обратность проверяется стандартно; см. [6, т. 1, гл. II], [5, т. 2]. $\square$

Следствие 5.2. Пусть M связно, $\pi_1(M) \neq 0$.

- (i) Плоскостность необходима, но не достаточна для расщепимости: расщепимость равносильна паре условий $\Omega \equiv 0$ и $\rho_{\omega} = 1$.
- (ii) Для плоской связности перенос вдоль петли γ зависит лишь от класса $[\gamma] \in \pi_1(M)$, и расхождение с расщеплённой моделью на γ равно $d_G(\rho_{\omega}([\gamma]), e)$; на стягиваемых петлях оно равно нулю.
- (iii) Пространство модулей плоских моделей с точностью до калибровочной эквивалентности есть многообразие характеров $\operatorname{Hom}(\pi_1(M), G)/G$.

Доказательство. (i) Расщепимость означает $\operatorname{Hol}(\omega, p) = \{e\}$; по теореме Амброуза–Зингера и связности Hol^0 плоскостность равносильна $\operatorname{Hol}^0 = \{e\}$, и тогда $\operatorname{Hol} \cong \operatorname{im} \rho_{\omega}$; тривиальность образа равносильна $\rho_{\omega} = 1$. (ii) Гомотопическая инвариантность переноса при $\Omega \equiv 0$ стандартна (теорема Фробениуса для горизонтального распределения); значение на $[\gamma]$ есть $\rho_{\omega}([\gamma])$. (iii) Следует из теоремы 5.1. $\square$

6. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Результаты §§2–5 решают прямую задачу: по паре (P, ω) вычисляется цена любой её расщеплённой модели. Но данные, поступающие от системы, — не пара (P, ω) , а голономии: значения переноса вдоль петель. Обратная задача — восстановление (P, ω) по голономиям — решена в трёх предельных режимах:

- (i) *полные данные*: гладкий функтор переноса, заданный на всех путях, восстанавливает (P, ω) однозначно с точностью до изоморфизма [2];
- (ii) *бесконечно малые данные*: голономии малых петель определяют кривизну поточечно (предложение 3.1);
- (iii) *гомотопически инвариантные данные*: реализации плоски и классифицируются многообразием характеров (теорема 5.1).

Эти три ответа окружают единственный оставшийся режим — конечный — и вынуждают следующий вопрос.

Вопрос. Пусть M компактно; заданы петли $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ в M , элементы $h_1, \dots, h_N \in G$ и точность $\delta \geq 0$. *Реализацией данных* назовём пару (P, ω) с

$$d_G(\tau_{\gamma_i}(\omega), h_i) \leq \delta, \quad i = 1, \dots, N$$

(голономии вычислены относительно фиксированных точек слоёв; смена точек заменяет данные на сопряжённые).

- (а) Когда множество реализаций непусто (составные петли налагают на h_i соотношения) и достигается ли $\inf S_{\text{YM}}$ по реализациям?
- (б) Единственна ли минимальная реализация с точностью до калибровочной эквивалентности и устойчива ли она при $\delta \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$?
- (в) Уже одна стягиваемая петля γ с данным $h \neq e$ и $\delta = 0$ исключает плоские реализации (следствие 5.2(ii)). Верно ли количественное усиление

$$\inf_{\text{реализации}} S_{\text{YM}} \geq c(M, \gamma) d_G(h, e)^2, \quad c(M, \gamma) > 0,$$

и какова точная константа? В двумерной абелевой модели (диск D , $G = U(1)$, голономия границы h) неравенство Коши–Буняковского даёт точный ответ: $\inf S_{\text{YM}} = d_G(h, e)^2 / (2|D|)$, причём нижняя грань достигается на постоянной кривизне. Общий случай открыт.

Вопрос — математическая форма требования замечания 7.2: выяснить, что именно конечный набор голономических данных принуждает утверждать о геометрии системы. В нулевом страте ($\inf S_{\text{YM}} = 0$) задача редуцируется к геометрии многообразия характеров $\text{Hom}(\pi_1(M), G)/G$.

7. ЗАМЕЧАНИЯ О ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ И ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ

Замечание 7.1 (физическая реализация). Расслоение собственных состояний над пространством параметров гамильтониана несёт естественную $U(1)$ -связность; её голономия — геометрическая фаза [4], отождествлённая с голономией связности в [9], а кривизна для систем общего положения отлична от нуля. Целочисленное квантование холловской проводимости есть целочисленность класса Черна этого расслоения [10]. В терминах настоящей заметки: для таких систем расщеплённая модель неадекватна в точном смысле §§2–4, с ошибкой, измеряемой предложением 3.1.

Замечание 7.2 (область применимости). Все результаты заметки — утверждения о паре (P, ω) . Применение их к конкретной эмпирической системе требует отдельного обоснования того, что система точно описывается главным расслоением со связностью; этот вопрос здесь не рассматривается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Ambrose, I. M. Singer, *A theorem on holonomy*, Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953), 428–443.
- [2] J. W. Barrett, *Holonomy and path structures in general relativity and Yang–Mills theory*, Internat. J. Theoret. Phys. **30** (1991), 1171–1215.
- [3] А. А. Белавин, А. М. Поляков, А. С. Шварц, Ю. С. Тюпкин, *Pseudoparticle solutions of the Yang–Mills equations*, Phys. Lett. B **59** (1975), 85–87.
- [4] M. V. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proc. R. Soc. Lond. A **392** (1984), 45–57.
- [5] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия: методы и приложения*, М.: Наука, 1986.
- [6] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 1, 2, М.: Наука, 1981.
- [7] Дж. Милнор, Дж. Сташеф, *Характеристические классы*, М.: Мир, 1979.
- [8] Л. С. Понтрягин, *Характеристические циклы дифференцируемых многообразий*, Матем. сборник **21(63)** (1947), 233–284.
- [9] B. Simon, *Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry’s phase*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983), 2167–2170.
- [10] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, M. den Nijs, *Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982), 405–408.

НЕЗАВИСИМЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬ